

## 7. GEODETSKE MREŽE

Zadatak geodezije, kao što je već pomenuto, je premer zemljišta i objekata u cilju izrade planova i karata. Pre nego što se pristupi premeru terena, postavljaju se geodetske tačke na terenu, čije su koordinate poznate u koordinatnom sistemu izrade plana ili karte. Više takvih tačaka raspoređenih po terenu čine geodetsku mrežu. Sve mreže su postavljene po principu «od većeg ka manjem».

Zavisno od oblika i merenih veličina mogu biti:

- trigonometrijske mreže
- poligonske mreže
- linijske mreže
- nivelmanske mreže

### 7.1. Trigonometrijska mreža

Niz tačaka na fizičkoj površi zemlje postavljenih po određenim pravilima, tako da predstavljaju temena trouglova koji se nadovezuju jedan na drugi, zove se trigonometrijska mreža (slika 7.1). Jednostavno rečeno, trigonometrijska mreža je mreža međusobno povezanih trouglova.

Temena ovih trouglova predstavljaju trigonometrijske tačke, koje se na terenu obeležavaju trajnim belegama, a na kartama i planovima odgovarajućim topografskim oznakama.

Skup radova izvedenih na terenu i kancelariji čiji je krajnji cilj dobijanje koordinata trigonometrijskih tačaka naziva se triangulacija.

Trigonometrijska mreža služi :

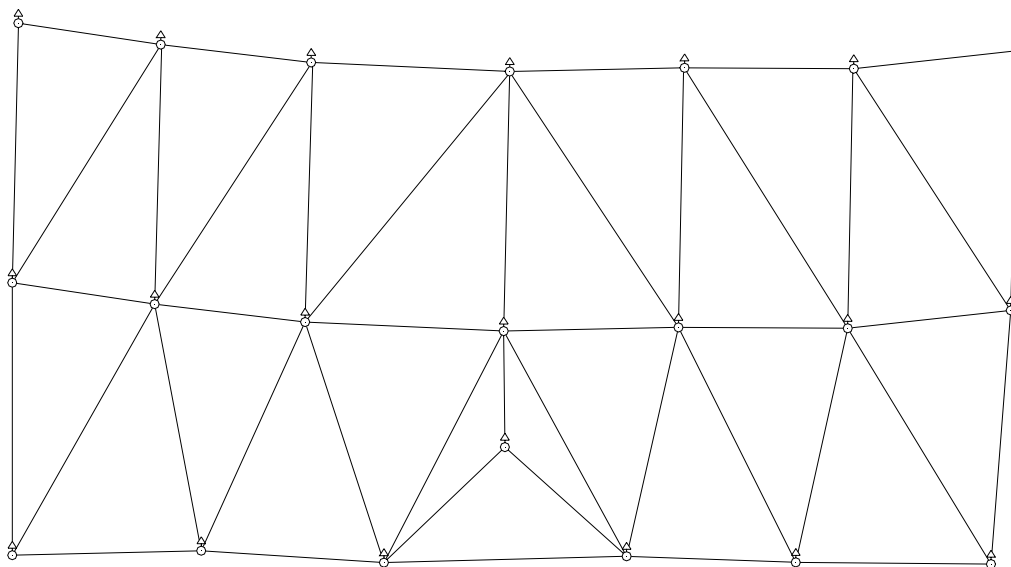
- Za rešavanje naučnog dela geodezije
- Kao geometrijska osnova za premer zemljišta u cilju izrade planova i karata
- Kao geometrijska osnova na koju se oslanjaju druge geodetske mreže
- Za rešavanje inženjersko-tehničkih zadataka iz primenjene geodezije

Na teritoriji Republike Srbije i Bosne i Hercegovine, za potrebe državnog premera izrađena je državna trigonometrijska mreža. Izrađena je po principu od većeg ka manjem u 4 reda i to:

- I red - (dužina strana > 20km)

- II red – osnovni (dužina strana od 15km do 25km)
- II red - popunjavajući (dužina strana od 9km do 18km)
- II red – osnovni (dužina strana od 5km do 13km)
- III red - popunjavajući (dužina strana od 3km do 7km)
- IV red - (dužina strana od 1km do 4km)

Izrađivana je parcijalno u poslednjih 100 godina, a 1956. godine izvršeno je preopažanje tačaka trigonometrijske mreže i sračunate su koordinate tačaka koje su zvanične koordinate državne trigonometrijske mreže.



Slika 7.1 : Trigonometrijska mreža

## 7.2. Poligonska mreža

### 7.2.1. Osnovni pojmovi

Najmasovniji radovi u geodeziji se odnose na pozicioniranje (određivanje Y,X,Z koordinata) tačaka na Zemljinoj površi i izradom odgovarajućih planova i karata (detaljni premer).

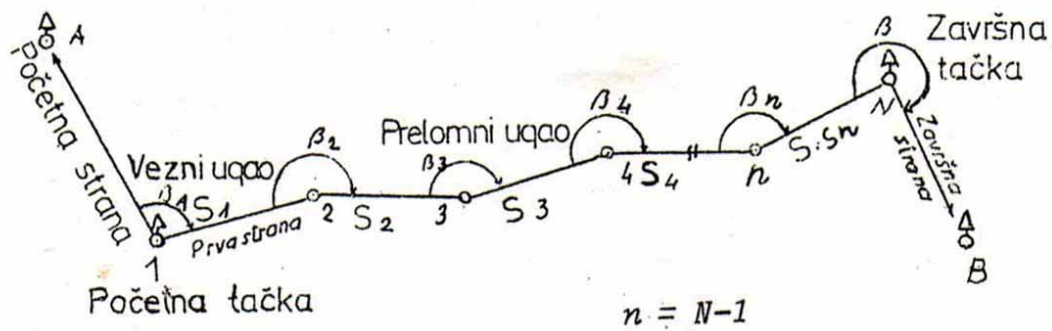
Detaljni premer podrazumeva postojanje geodetske mreže, takve gustine tačaka, koja omogućava snimanje, a to u proseku iznosi 200-300 m odstojanja između dve susedne tačke.

Trigonometrijska mreža ne zadovoljava potrebe premera, jer su dužine strana 1-4 km. Zbog toga se između dve trigonometrijske tačke postavlja niz tačaka (rastojanje 100-300m) koje se međusobno (svaka susedna) dogledaju u cilju merenja uglova i dužina.

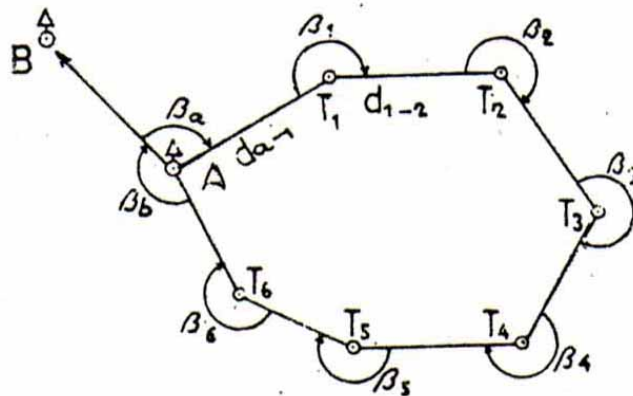
Ove tačke se nazivaju poligonske tačke i njihova topografska oznaka je krug sa tačkom u centru, sa čije desne strane stoji broj tačke. Npr:  $\odot 122$ .

Niz poligonskih tačaka naziva se poligonski vlak koji može biti:

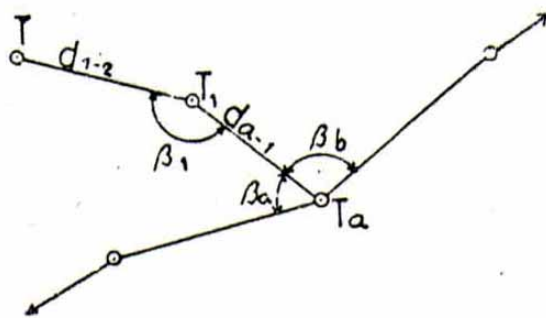
- umetnuti poligonski vlak - vlak koji je postavljen između dve date tačke (između dve tačke sa koordinatama, trigonometrijske ili poligonske) (slika 7.2);
- zatvoreni poligonski vlak - poligonski vlak koji počinje i završava se na istoj tački (slika 7.3);
- slepi poligonski vlak - vlak koji počinje od date tačke i ne vezuje se na kraju vlaka (slika 7.4).



Slika 7.2 : Umetnuti poligonski vlak



Slika 7.3 : Zatvoreni poligonski vlak



Slika 7.4 : Slepj poligonski vlak

Smer računanja koordinata tačaka poligonskog vlaka se označava na skici crvenom linijom koja ide sa leve strane vlaka (sa te strane se i uzimaju mereni uglovi koji služe za računanje) od početka ka kraju. Na početku linije kojom je označen smer se nalazi tačka a na kraju strelica.

Elementi poligonskog vlaka su:

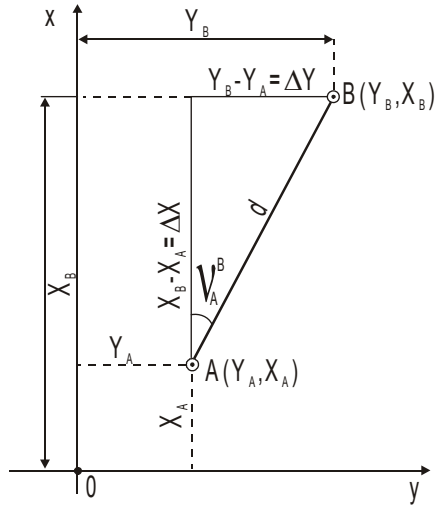
- početna i završna tačka vlaka - date tačke (tačke sa koordinatama) na koje se vlak oslanja;
- poligonska strana - duž između dve susedne tačke u vlaku (bilo između dve poligonske ili jedne poligonske i jedne trigonometrijske);
- početna i završna strana - date strane na koje se vlak priključuje ( $S_{A1}$   $S_{NB}$ );
- početni ( $\beta_1$ ) i završni ( $\beta_N$ ) vezni uglovi - uglovi na datoj početnoj i završnoj tački vlaka;
- prelomni uglovi - uglovi na poligonskim tačkama između susednih poligonskih strana ( $\beta_2, \beta_3, \dots \beta_n$ ).

Za računanje poligonskog vlaka je neophodno poznavati početni direkcioni ugao  $\nu_A^1$  i završni direkcioni ugao  $\nu_N^B$ .

Prilikom računanja poligonskog vlaka treba koristiti vezne i prelomne uglove koji se nalaze sa leve strane u odnosu na smer računanja vlaka.

**7.2.2. Računanje direkcionog ugla i dužine iz koordinata krajnjih tačaka**

Date su koordinate dve tačke  $A(Y_A, X_A)$  i  $B(Y_B, X_B)$  (slika 7.5). Treba sračunati direkcionu ugao  $v_A^B$  i dužinu  $d$ .



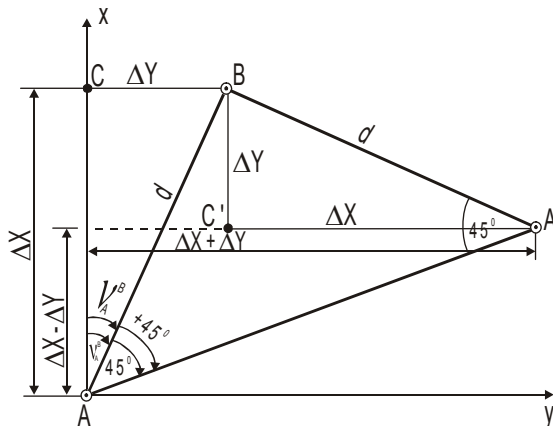
Slika 7.5

Prvo se računa direkcionu ugao

$$\operatorname{tg} v_A^B = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

Zatim se vrši kontrola po formuli (slika 7.5):

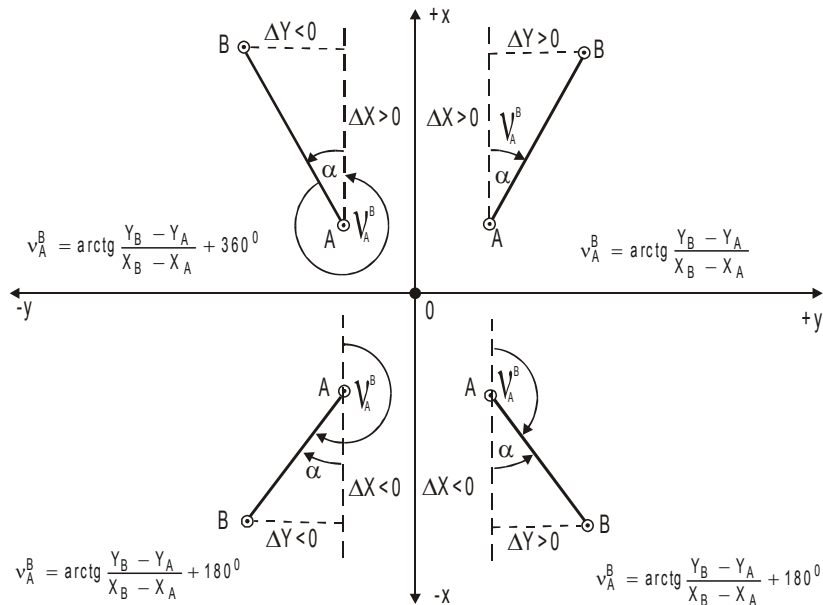
$$\operatorname{tg}(v_A^B + 45^\circ) = \frac{\Delta X + \Delta Y}{\Delta X - \Delta Y}$$



Slika 7.6

Kontrola:

Vrednosti sračunatih uglova treba da se razlikuju za  $45^0$ . Međutim, zbog zaokruživanja, dozvoljena je razlika za  $\pm 3''$ . Direkciono ugao može imati sve vrednosti od  $0^0$  do  $360^0$ , u zavisnosti od položaja duži u koordinatnom sistemu. Jedan od lakših načina računanja direkcionih uglova, dat je na slici.



Slika 7.7

Kada je sračunat direkciono ugao  $v_A^B$ , određuje se dužina dva puta: preko  $\Delta Y$  i preko  $\Delta X$

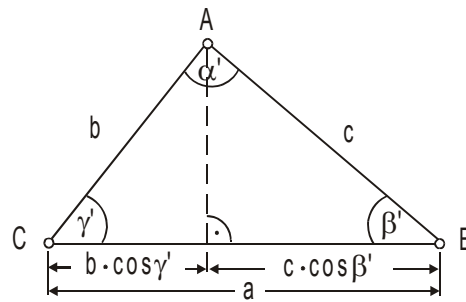
$$d = \frac{Y_B - Y_A}{\sin v_A^B} = \frac{\Delta Y}{\sin v_A^B}$$

$$d = \frac{X_B - X_A}{\cos v_A^B} = \frac{\Delta X}{\cos v_A^B}$$

Razlika sračunatih dužina može da iznosi  $\pm 3$  jedinice na poslednjem decimalnom mestu. Ako je razlika veća uzima se ona dužina koja je sračunata preko veće korodinatne razlike.

### 7.2.3. Rešavanje trougla primenom sinusne teoreme

Izmerena su sva tri ugla i dužina jedne strane trougla.(slika 7.8)



Slika 7.8

Merene veličine:

- uglovi  $\alpha, \beta, \gamma$
- dužina  $a$ .

Treba odrediti stranice  $b$  i  $c$ . Usled neminovnih grešaka merenja uglova, zbir merenih uglova nije  $180^\circ$ .

$$\alpha + \beta + \gamma \neq 180^\circ$$

$$f = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$$

$f$  - uglovno odstupanje u trouglu koje delimo sa tri da bi dobili popravke merenih uglova

$$v_\alpha = v_\beta = v_\gamma = v = \frac{f}{3}$$

Kontrola: Zbir popravaka mora biti  $f$ .

$$[v] = f$$

Kada ove popravke dodamo merenim uglovima dobijamo popravljene uglove

$$\alpha' = \alpha + \frac{f}{3} = \alpha + v_\alpha$$

$$\beta' = \beta + \frac{f}{3} = \beta + v_\beta$$

$$\gamma' = \gamma + \frac{f}{3} = \gamma + v_\gamma$$

Kontrola: Zbir popavljenih uglova mora biti  $180^0$ .

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 180^0$$

Strane b i c, računaju se primenom sinusne teoreme sa popavljenim uglovima

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha} = m$$

$$b = \frac{a}{\sin \alpha'} \sin \beta' = m \cdot \sin \beta'$$

$$c = \frac{a}{\sin \alpha'} \sin \gamma' = m \cdot \sin \gamma'$$

Kontrola računanja vrši se po formuli

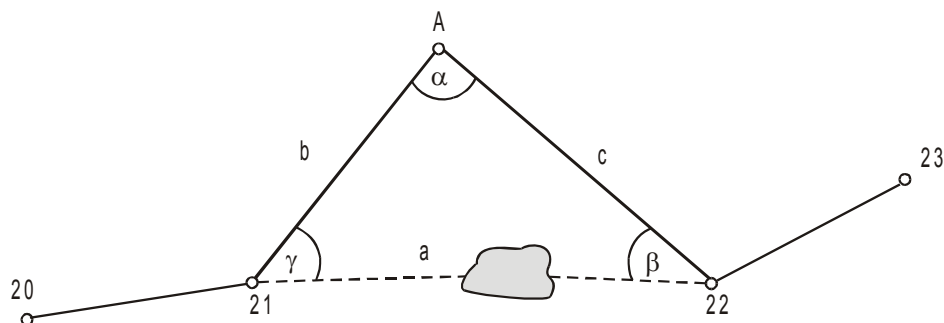
$$b \cdot \cos \gamma' + c \cdot \cos \beta' = a$$

#### 7.2.4. Rešavanje trougla primenom kosinusne teoreme

Za rešavanje trougla pomoću kosinusne teoreme moraju biti poznata najmanja tri elementa (slika 7.9):

dve strane i zahvaćeni ugao

- b, c i ugao  $\alpha$
- a, c i ugao  $\beta$
- a, b i ugao  $\gamma$



Slika 7.9



Date su veličine  $b$ ,  $c$  i  $\alpha$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

Pošto smo sračunali stranu  $a$ , primenom sinusne teoreme računamo uglove  $\beta$  i  $\gamma$ .

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m$$

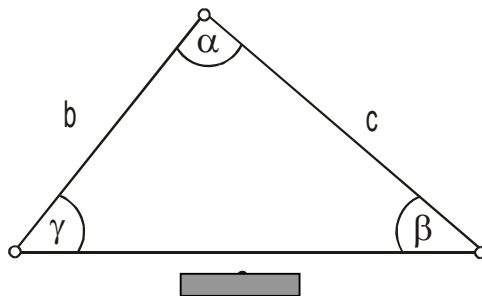
odakle je

$$\sin \beta = \frac{b}{m}$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{m}$$

Kontrola:  $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$

### 7.2.5. Rešavanje trougla primenom tangensne teoreme



Slika 7.10

Za rešavanje trougla pomoću tangensne teoreme moraju biti poznata najmanje tri elementa (slika 7.10):

#### dve strane i zahvaćeni ugao

- $b$ ,  $c$  i ugao  $\alpha$
- $a$ ,  $c$  i ugao  $\beta$
- $a$ ,  $b$  i ugao  $\gamma$

Poznato nam je da je  $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$

$$\beta + \gamma = 180^{\circ} - \alpha$$

$$\frac{\beta + \gamma}{2} = 90^{\circ} - \frac{\alpha}{2}$$

Po tangensnoj teoremi

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tg}\left(90^{\circ} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

odakle je:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

Rešavajući ove jednačine sa dve nepoznate dobija se:

$$\beta = \frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\beta-\gamma}{2} \quad ; \quad \gamma = \frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\beta-\gamma}{2}$$

Kontrola:

S obzirom da su nam poznati svi uglovi, problem se svodi na računanje nepoznate strane  $a$ , primenom sinusne teoreme:

$$a = b \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = c \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

### **7.2.6. Projektovanje i rekognosciranje poligonske mreže**

Rekognosciranje poligonske mreže (eng. recognise - prepoznavanje) predstavlja izbor mesta na terenu za postavljanje poligonskih tačaka.

Tačke se postavljaju po vlačima koji zajedno čine poligonsku mrežu, koja služi kao osnova za snimanje detalja.

Projektom se propisuje tačnost merenja uglova i dužina, metoda snimanja, razmera snimanja, itd.

Merenja u građevinskom reonu podrazumevaju tačnije metode i krupniju razmeru planova.

Građevinski reon predstavlja deo terena koji je delimično ili potpuno izgrađen, ili predviđen za buduću izgradnju.

Prilikom državnog premera snimanje detalja se vrši po katastarskim opštinama.

Katastarska opština (KO) podrazumeva jedno naselje (selo) sa pripadajućim atarom. Zbog toga se i poligonska mreža razvija po katastarskim opštinama.

Veći gradovi se sastoje iz više katastarskih opština i za njih se postavlja jedinstvena poligonska mreža (bez obzira na granice KO).

Ista je situacija i kod poligonskih mreža za potrebe inženjerske geodezije (snimanje puta, kanala, tunela, mostova, itd).

Pri postavljanju poligonskih tačaka, najpre se na terenu pronalaze i signališu trigonometrijske tačke.

Pre rekognosciranja je izrađen projekat poligonske mreže, overen od strane Republičkog geodetskog zavoda.

Pri projektovanju i rekognosciranju se poštuje princip "od većeg ka manjem".

Najpre se postavljaju glavni vlaci, a zatim se unutar njih (praktično su u obliku trouglova) postavljaju vlaci manjeg obima i manjih dužina dok se ne postigne dovoljna gustina tačaka za snimanje detalja.

Poligonski vlaci se postavljaju duž ulica, puteva, železničkih pruga, i ostalih komunikacija.

Nije dozvoljeno ukrštanje vlakova istog ranga, a slepe poligonske vlake treba izbegavati, i oni se postavljaju samo kada je neophodno (ne postoji pouzdana kontrola). Slep vlak može imati najviše dve strane.

Dužine u poligonskoj mreži se po pravilu mere elektronskim putem (elektrooptički daljinomer ili totalna stanica), a uglovi klasičnim teodolitom ili elektronskim teodolitom (koji može biti u okviru totalne stanice).

U poligonskim mrežama, koje su ranije merene, i čije su koordinate tačaka i danas u upotrebi, merenje dužina se vršilo klasičnim putem - čeličnom poljskom pantljkikom.

Poligonometrijske mreže su mreže čije su dužine merene elektronskim daljinomerom, a uglovi jednosekundnim teodolitom.

Njihov topografski znak je npr. 123.

Pri rekognosciranju poligonske mreže poštovana su osnovna pravila:

- vlak treba da bude razvučen - prelomni uglovi trebaju biti što bliži vrednosti od  $180^{\circ}$  (zbog veće tačnosti i jednostavnijeg izravnjanja);

- dužine koje su merene pantljikom trebale su da budu do 250 m (izuzetno do 500 m), a ukupna dužina vlaka do 2,5 km na terenu povoljnom za merenje dužina (2,0 km na srednje povoljnom, a 1-1,5 km na nepovoljnom terenu);
- odnos susednih stranica ne bi trebalo da bude ispod 1:2 (izuzetno 1:3).

Poligonski vlaci koji se susstiču u čvornoj tački (tri ili više vlaka) treba da budu približno iste dužine i pravilno raspoređeni.

Prilikom izbora mesta na kome se postavljaju i stabilizuju poligonske tačke treba uvažiti sledeće:

- mesto treba da bude van oranja (na bankini puta, na međi između parcela i sl.), da tačka ne bi bila uništena;
- da vidljivost susedne tačke bude takva da se značka može vizirati što bliže belegi;
- da položaj poligonske tačke bude takav da se sa njega može snimiti što više detalja;
- da se za poligonske tačke mogu vezivati sporedni vlaci;
- u gradovima i naseljima poligonske tačke treba postavljati na trotoarima, dalje od objekata infrastrukture (elementi vodovoda, kanalizacije i sl.);
- da se (kod merenja dužina pantljikom) može meriti bez preloma i izdizanja pantljike (na jednoj poligonskoj strani može biti najviše dva, a izuzetno tri preloma).

Kvalitet poligonske mreže zavisi od terenskih prilika i stručnjaka koji su vršili projektovanje i realizaciju.

Po signalisanju trigonometrijskih tačaka, najpre se postavljaju vlaci između trigonometrijskih tačaka, između trigonometrijskih i čvornih tačaka i između čvornih tačaka.

Polazeći od jedne trigonometrijske tačke u pravcu završne tačke vrši se izbor mesta za postavljanje poligonske tačke.

Po rekognosciranju glavnih vlakova postavljaju se i sporedni vlaci, dok se područje ne pokrije dovoljno gustom mrežom.

I računanje poligonske mreže se vršilo istim redosledom (princip "od većeg ka manjem").

Savremene poligonske mreže podrazumevaju računanje koje predstavlja zajedničko izravnjanje svih veličina, pa poligonski vlaci ne moraju da zadovolje kriterijume ispruženih vlakova.

### 7.2.7. Vrste i tipovi belega kojim se obeležavaju poligonske tačke

Višestruka namena poligonskih tačaka i trajan karakter koji poligonska mreža ima, podrazumevaju način stabilizacije.

Način stabilizacije zavisi od vrste podloge na koju se belega postavlja. To može biti:

- njiva;
- livada;
- pašnjak;
- neobrađivo zemljište;
- stene;
- makadam;
- beton;
- asfalt, itd.

Belege treba da budu trajne (izrađene od keramike, kamena, betona, gvožđa, itd.), a samo u izuzetnim slučajevima mogu biti i privremene, i tada se izrađuju od drveta (u obliku kočića).

Po broju sastavnih delova postoje:

- proste (jednostruke) belege - koje imaju samo jedan deo;
- složene (sa dva ili tri dela) belege - mogu imati i neke zaštitne delove.

Postoje kombinovane belege koje mogu poslužiti i kao belege za nivelmanske repere.

Prema položaju u zemljištu postoje:

- vidne (nadzemne) belege - gornji deo viri iznad terena;
- podzemne belege - potpuno pokrivenne zemljom.

Preciznost centra belege zavisi od tačnosti kojom su vršena merenja kada se tačka postavlja. Centar belege je često obeležen krstom u kamenu ili je to sredina otvora keramičke cevi.

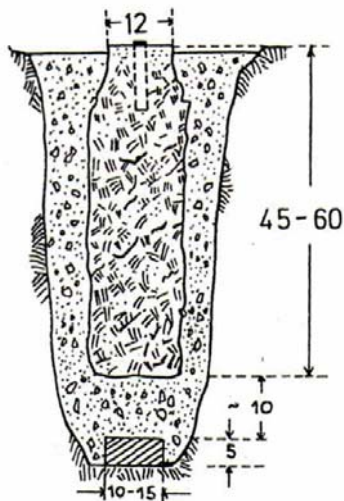
Tačke postavljene u vremenu kada su korišćeni elektronski daljinomeri, i kada je centrisanje vršeno pomoću optičkog viska, imaju mogućnost preciznijeg centrisanja (urezan mali krst u metalnu bolcnu, rupica u sredini belege i slično).

Tačke koje se danas postavljaju, svakako moraju imati precizan centar, jer su zahtevi i mogućnosti u pogledu tačnosti sve veći.

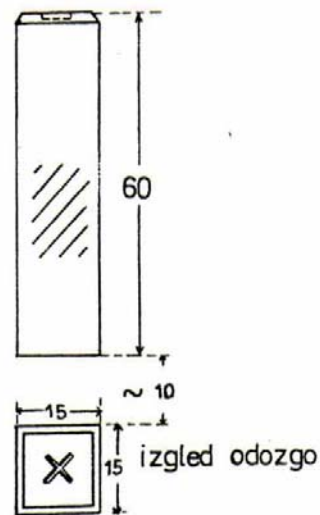
Belega treba da ima i podzemni centar koji se nalazi u vertikali centra gornjeg dela belege, i služi za obnavljanje u slučaju uništenja gornjeg dela belege.

Materijali i dimenzije belega su sledeći:

- belege od prirodnog kamena sa obrađenom glavom i usađenom bolcnom (nekada je umesto bolcne bio uklesan krst), što predstavlja centar belege (slika 7.11). Pogodna je za mekano zemljište i najbolje je da se postavi iznad površi zemlje 2-3 cm. Podzemni centar se izrađuje od keramike;
- belege od armiranog betona (slika 7.12) sa oznakom centra u obliku bolcne sa rupicom ili repera sa rupicom (ranije je centar predstavljao uklesani krst). Usađuje se isto kao i prethodna;
- betonska ili keramička cev u obliku zarubljene kupe (slika 7.13) - centar predstavlja sredina šupljine cevi i ukopava se ispod nivoa terena 40-50 cm - ispod dubine oranja. Donja belega se izrađuje od keramike;

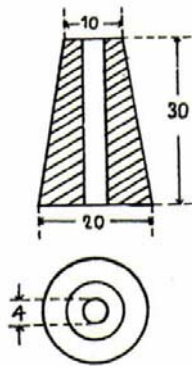


Slika 7.11

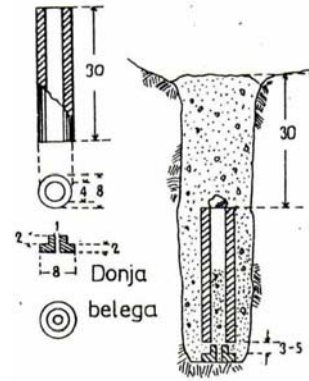


Slika 7.12

- keramička ili plastična cev valjkastog oblika (slika 7.14) pogodna je za obradivo zemljište i ukopava se ispod nivoa terena 40-50 cm - ispod dubine oranja;  
-na istoj dubini se ukopavaju i belege od prirodnog kamena ili armiranog betona ukoliko se postavljaju na obradivom zemljištu. Svakako da treba izbegavati postavljanje tačaka u okviru obradive površine, već je bolje koristiti međe, bankinu puta, itd.

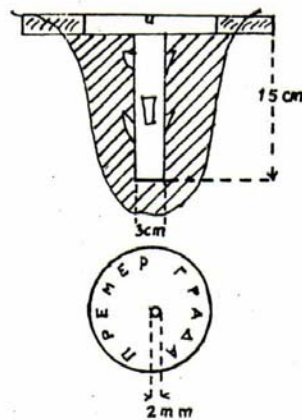


Slika 7.13

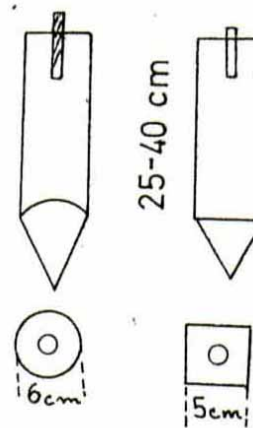


Slika 7.14

- metalne belege (tzv. kape) - posebno pogodne u gradovima sa asfaltiranim ulicama i trotoarima (slika 7.15). Ove belege se ugrađuju tako da je vrh u ravni asfalta.
- Kao privremene belege koristi se drveno kolje, okruglog ili kvadratnog preseka (slika 7.16).



Slika 7.15



Slika 7.16

### 7.3. Linijska mreža

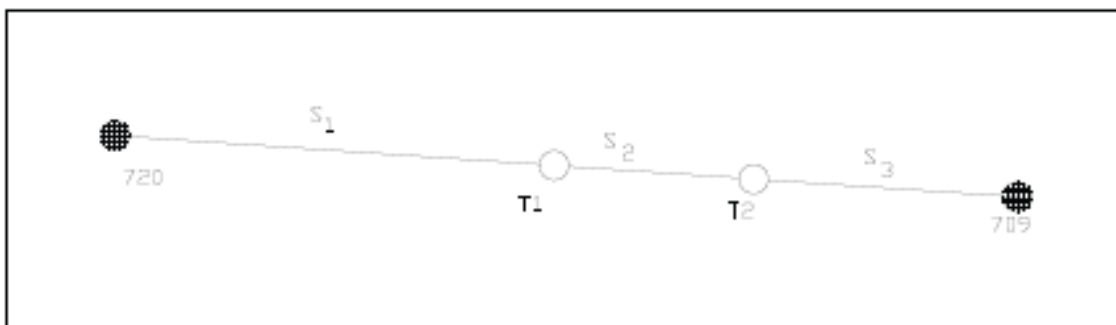
U slučajevima kada poligonska mreža ne zadovoljava potrebe, pogušćava se linijskom mrežom.

Linijske tačke se postavljaju na pravicima, linijama koje su definisane dvema datim tačkama, te otuda i potiče naziv "linijska mreža". Linijske tačke se često nazivaju i male tačke.

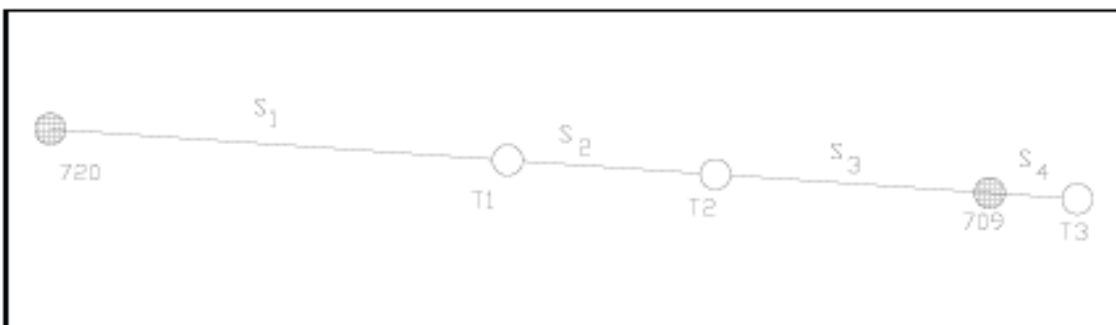
Duži između dveju linijskih tačaka ili linijskih i poligonskih tačaka ili između dveju poligonskih tačaka, nazivaju se linije za snimanje. Sve linije za snimanje zajedno čine linijsku mrežu.

Koordinate linijskih tačaka određuju se isključivo na osnovu merenja dužina. Linijske tačke mogu se odrediti kao:

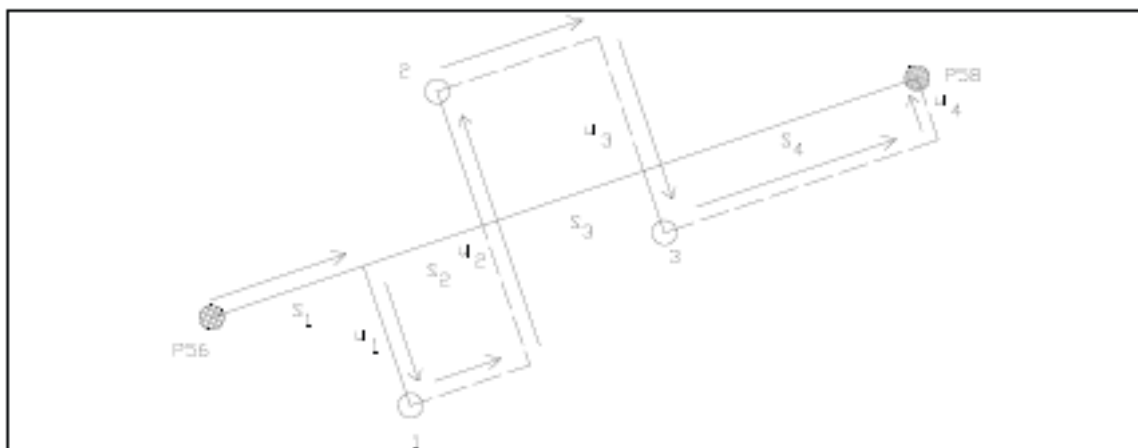
- linijske tačke umetnute na pravcu između datih geodetskih tačaka (slika 7.17)
- linijske tačke na produžetku date duži (slika 7.18)
- linijske tačke na upravnoj podignutoj na datu duž (slika 7.19)
- linijske tačke određene lučnim presekom (slika 7.20)



Slika 7.17 : Linijske tačke na liniji

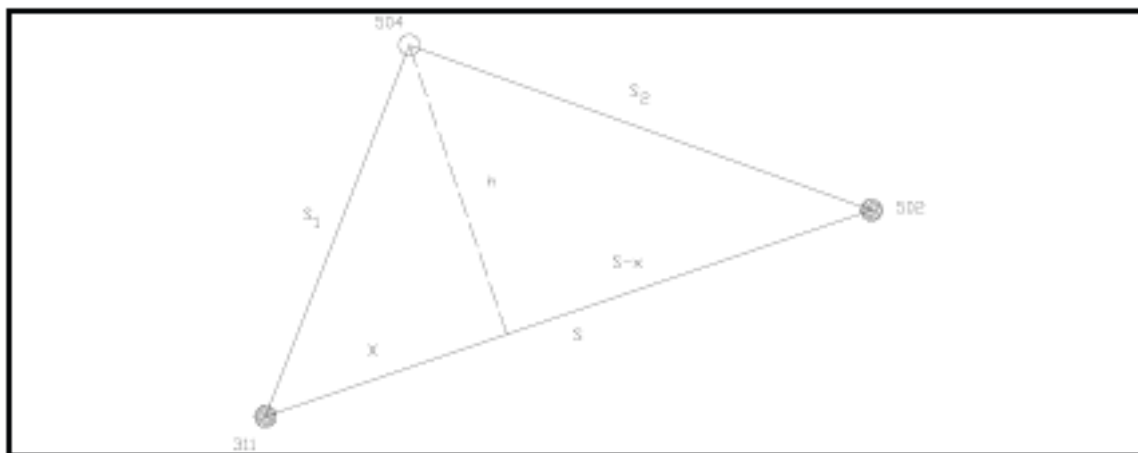


Slika 7.18 : Linijske tačke na produžetku linije



Slika 7.19 : Linijske tačke na liniji





Slika 7.20 : *Linijske tačke u lučnom preseku*

Linijaska mreža ima vrlo ograničena svojstva, jer se linijske tačke moraju nalaziti na unapred uslovljenim linijama, što joj u znatnoj meri ograničava elastičnost u pogledu njenog prilagođavanja detalju. Određivanje koordinata linijskih tačaka je vrlo jednostavno, a terenski radovi su mnogo manji nego kod poligonske mreže [6].

Nivelmanska mreža će biti detaljnije obrađena u glavi 9.