STATISTIKA

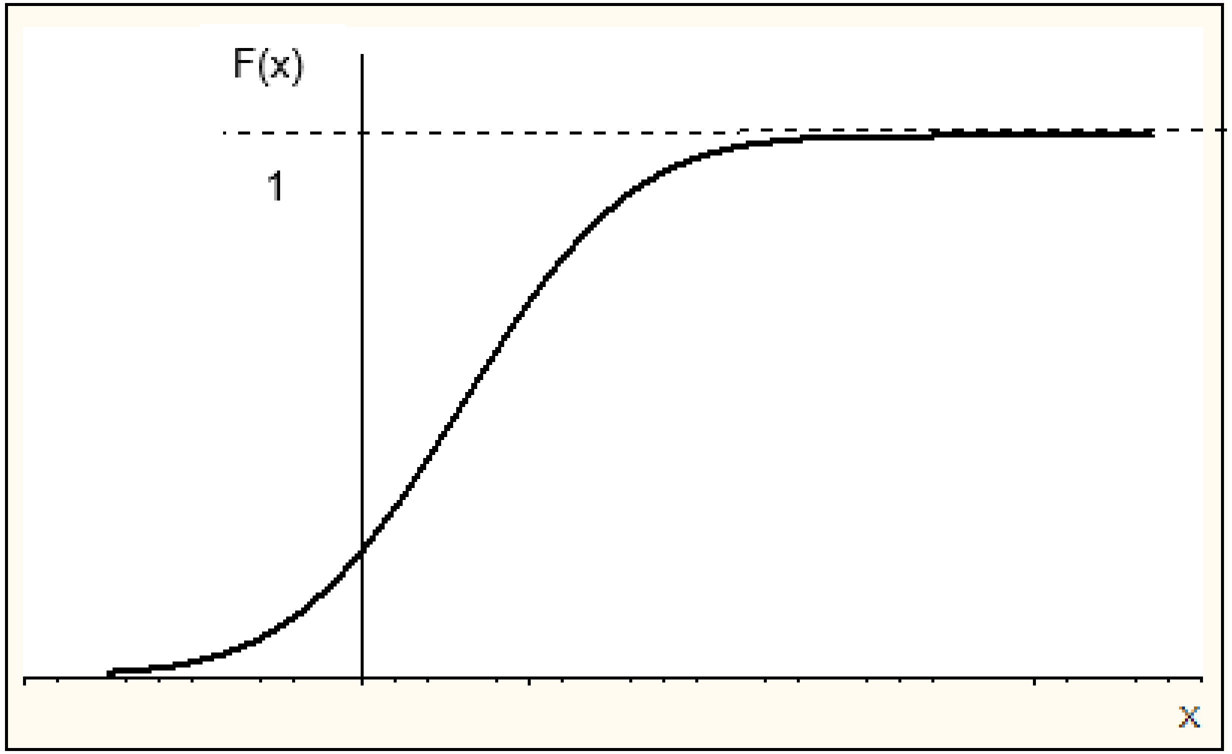
TEORIJSKE RASPODELE NEPREKIDNIH SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

RASPODELA NEPREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

- Neprekidna slučajna promenljiva, teorijski, može da uzme beskonačno mnogo vrednosti, pa je verovatnoća svake pojedinačne vrednosti blizu nule.
- Iz tog razloga neprekidna slučajna promenljiva se ne može zadati preko zakona raspodele, već se **zadaje pomoću funkcije raspodele.**
- ***Funkcija raspodele predstavlja verovatnoću da će slučajna promenljiva X uzeti vrednosti manje od x***, odnosno

$$F(X)=P(X<x).$$

RASPODELA NEPREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE



Slika 4.6: Funkcija raspodele neprekidne slučajne promenljive

RASPODELA NEPREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

- Karakteristike funkcije raspodele su:

1. $F(-\infty)=0 \qquad F(+\infty)=1$

2. $F(x_1)\leq F(x_2) \qquad$ za $x_1\leq x_2$

3. F(X) je neprekidna

Kod neprekidne slučajne promenljive utvrđuje se verovatnoća pripadanja intervalu

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

RASPODELA NEPREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

- Neprekidna slučajna promenljiva se može zadati još i pomoću **gustine raspodele.**
- ***Gustina raspodele f(X) slučajne promenljive X predstavlja prvi izvod funkcije raspodele***, tj.

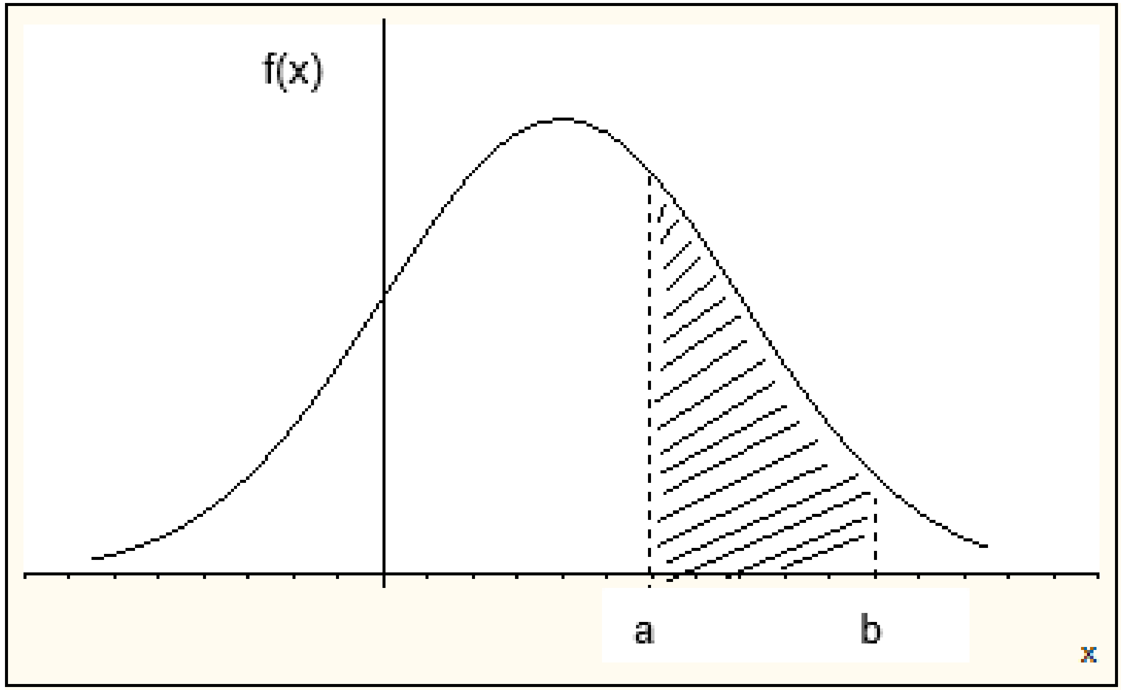
$$f(x) = F'(x).$$

RASPODELA NEPREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

- Ukupna površina ispod krive gustine verovatnoće jednaka je jedan, a verovatnoća javljanja slučajne promenljive X u intervalu $(x_1;x_2)$ jednaka je površini određenoj X osom, segmentom funkcije u posmatranom intervalu i ordinatama koje odgovaraju granicama intervala, tj:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx$$

RASPODELA NEPREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE



Slika 4.7: Gustina raspodele

NUMERIČKI POKAZATELJI NEPREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

- Definicije numeričkih pokazatelja za neprekidne slučajne promenljive su iste kao za prekidne slučajne promenljive, s tim što elementi verovatnoće f(x)dx zamenjuju verovatnoće p_i a integral sumu:

1. $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$

2. $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx - M^2(X)$

3. $\mu_k(X) = M[X - M(X)]^k = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^k \cdot f(x) \cdot dx$

- ***Modus neprekidne slučajne promenljive je ona njena vrednost u kojoj funkcija gustine raspodele dostiže maksimum.***

NORMALNA RASPODELA

- Neprekidna slučajna promenljiva X ima normalnu ili Gausovu (Gauss) raspodelu ako može uzimati sve vrednosti od -∞ do +∞ i ako je njena gustina raspodele definisana funkcijom:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2}$$

π - matematička konstanta približno jednaka 3,14159

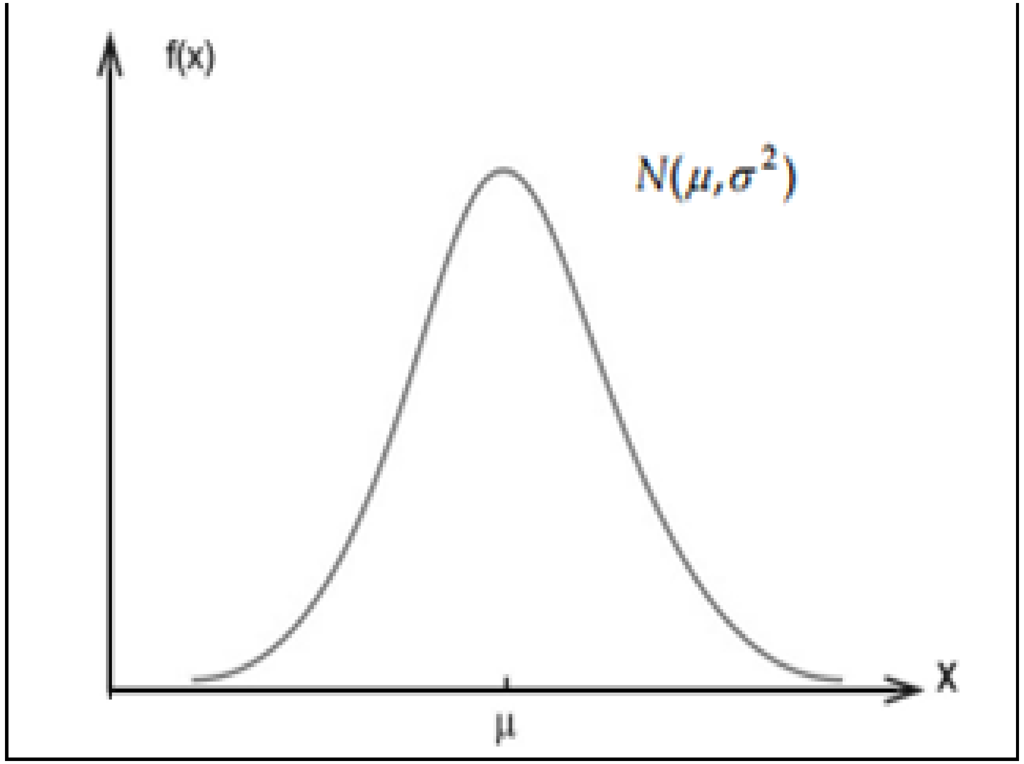
e - matematička konstanta približno jednaka 2,71828

μ - aritmetička sredina normalne slučajne promenljive

σ - standardna devijacija normalne slučajne promenljive

NORMALNA RASPODELA

- Normalna raspodela, koja zavisi od dva parametra μ i σ, označava se simbolično sa X:N(μ,σ).
- Grafički prikaz zakona verovatnoće normalne slučajne promenljive naziva se **normalnom ili Gaus-ovom krivom.**



Slika 4.8: Normalna kriva

NORMALNA RASPODELA

- Osobine normalne krive:

1. Ima oblik zvona.

2. Simetrična je u odnosu na pravu $x=\mu$.

3. Kao kod svake simetrične krive aritmetička sredina, modus i medijana su međusobno jednaki.

4. Funkcija $f(x)$ ima maksimum u tački μ i dve prevojne tačke u tačkama $\mu-\sigma$ i $\mu+\sigma$.

5. X-osa je i sa leve i sa desne strane njena asimptota.

NORMALNA RASPODELA

6. Srazmerno udaljavanju levo i desno od aritmetičke sredine ordinate grafika se brzo smanjuju tako da se za $x<\mu-3\sigma$ i $x>\mu+3\sigma$ one praktično malo razlikuju od nule.

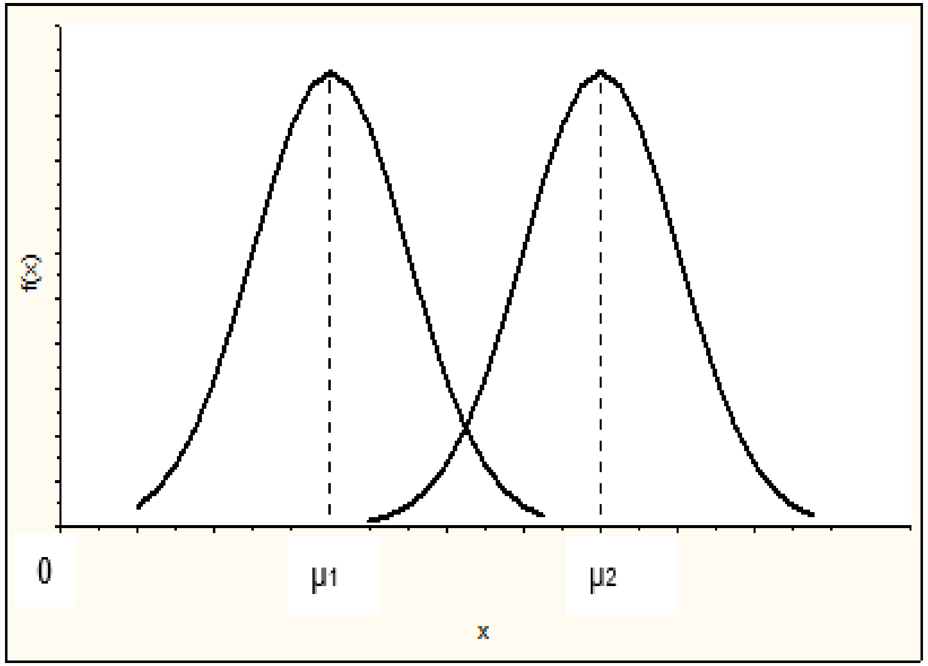
7. Relativna mera asimetrije α_3 jednaka je 0, a relativna mera spljoštenosti α_4 ima vrednost 3.

8. Kao kod svake krive gustine verovatnoće, ukupna površina ispod krive jednaka je 1.

S obzirom da je normalna kriva simetrična i da je površina ispod krive u stvari verovatnoća, sledi da verovatnoća da slučajna promenljiva X uzme neku vrednost manju (ili veću) od aritmetičke sredine iznosi 0,5.

NORMALNA RASPODELA

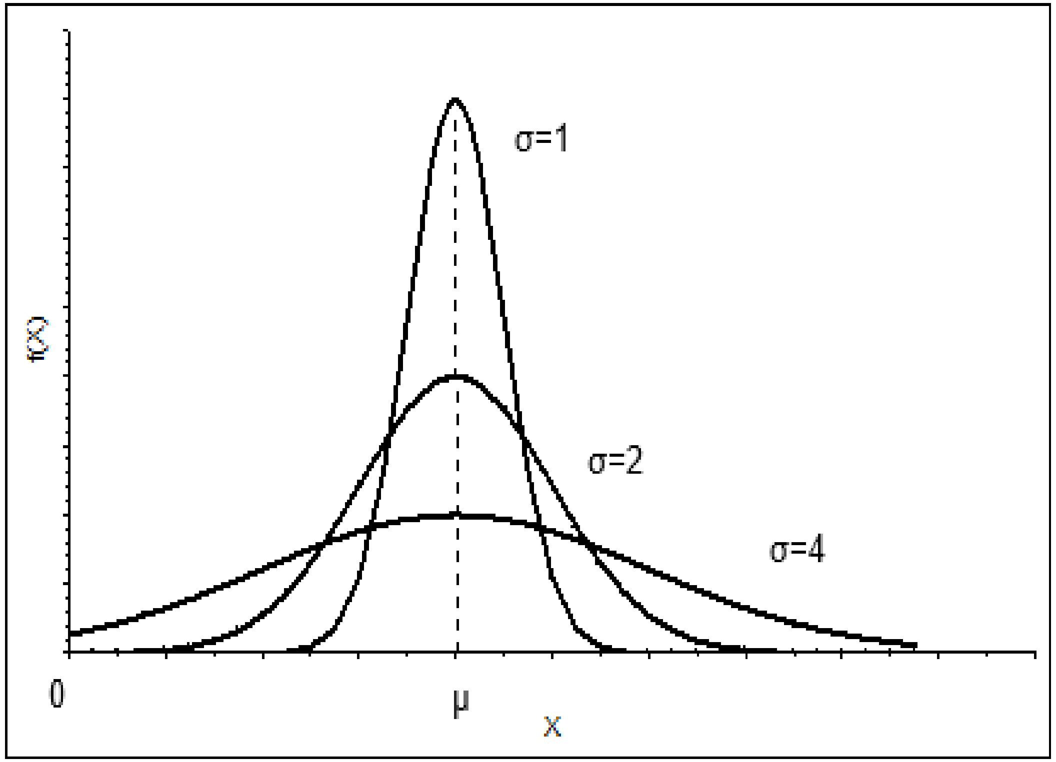
- 9. Normalna raspodela je u potpunosti definisana parametrima μ i σ. U zavisnosti od vrednosti ova dva parametra postoji čitava familija normalnih raspodela. Smanjenjem ili povećanjem vrednosti aritmetičke sredine dolazi do pomeranja čitave krive ulevo ili udesno, uz nepromenjenu disperziju



Slika 4.9a: Različiti oblici normalne krive u zavisnosti od vrednosti parametara μ za istu vrednost parametra σ

NORMALNA RASPODELA

9. (nastavak) Za veće vrednosti parametra σ maksimum je manji, a grafik širi u odnosu na pravu $x=\mu$, a za manje vrednosti tog parametra maksimum je veći, a grafik bliži pravoj $x=\mu$

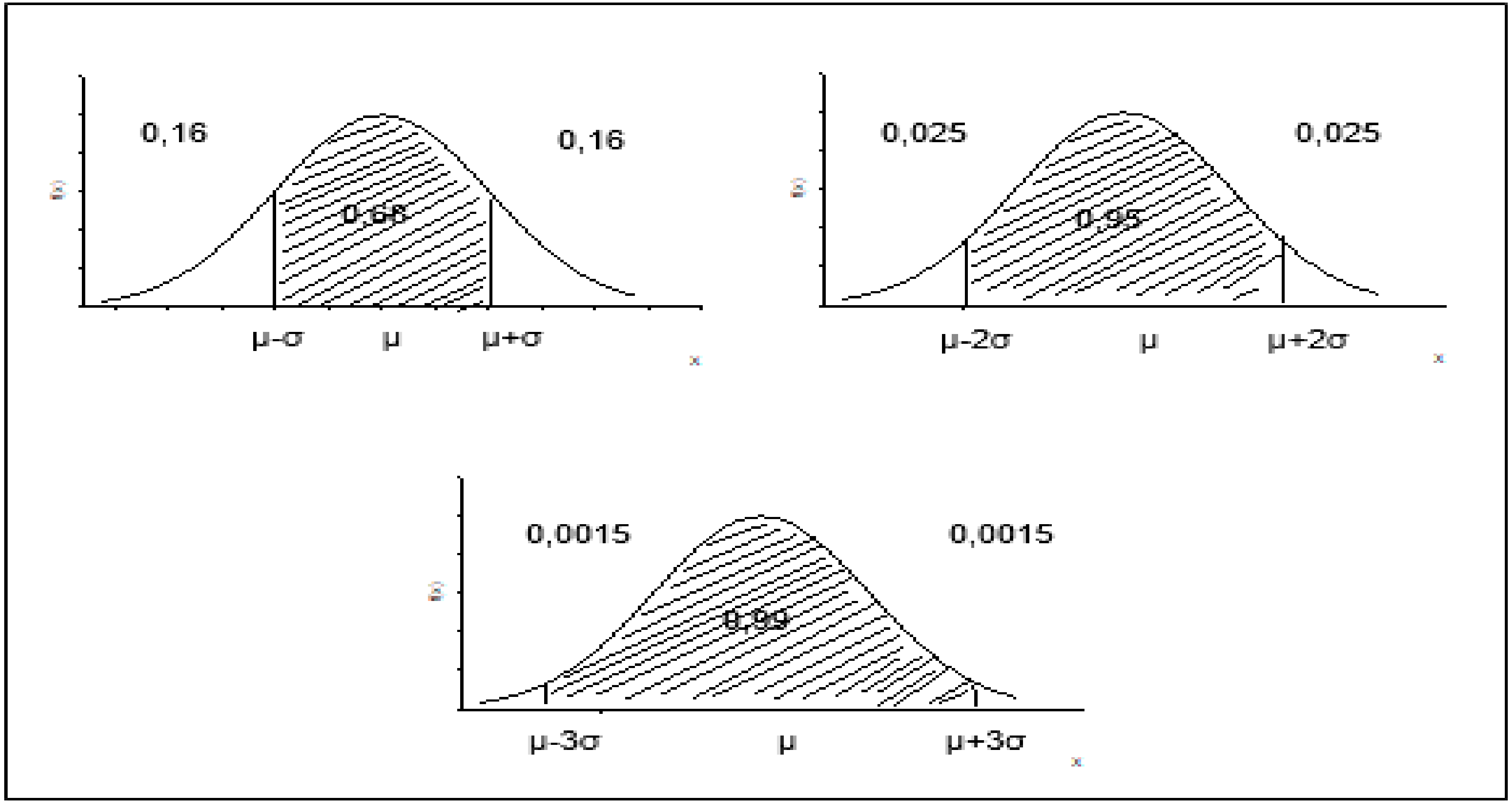


Slika 4.9b: Različiti oblici normalne krive u zavisnosti od vrednosti parametara σ za istu vrednost parametra μ

NORMALNA RASPODELA

- 10. Verovatnoća da slučajna promenljiva X uzme vrednost u razmaku ±1 standardna devijacija od aritmetičke sredine iznosi 0,68 (I sigma pravilo), u razmaku ±2 standardne devijacije približno 0,95 (II sigma pravilo) i u razmaku ±3 standardne devijacije približno 0,99 (III sigma pravilo).

NORMALNA RASPODELA



Slika 4.10: Sigma pravila

NORMALNA RASPODELA

- Verovatnoća da slučajna promenljiva X uzme vrednost u nekom intervalu (a,b) izračunava se kao određeni integral funkcije gustine raspodele.
- Kako je ta procedura komplikovana, da ne bismo morali u svakom konkretnom slučaju izračunavati određeni integral, formulisan je model normalne raspodele na koji se svi mogu svesti. To je **standardizovan normalni raspored.**
- Normalna raspodela je standardizovana ako je njena aritmetička sredina jednaka 0 a varijansa jednaka 1, a to se označava sa X:N(0,1).

NORMALNA RASPODELA

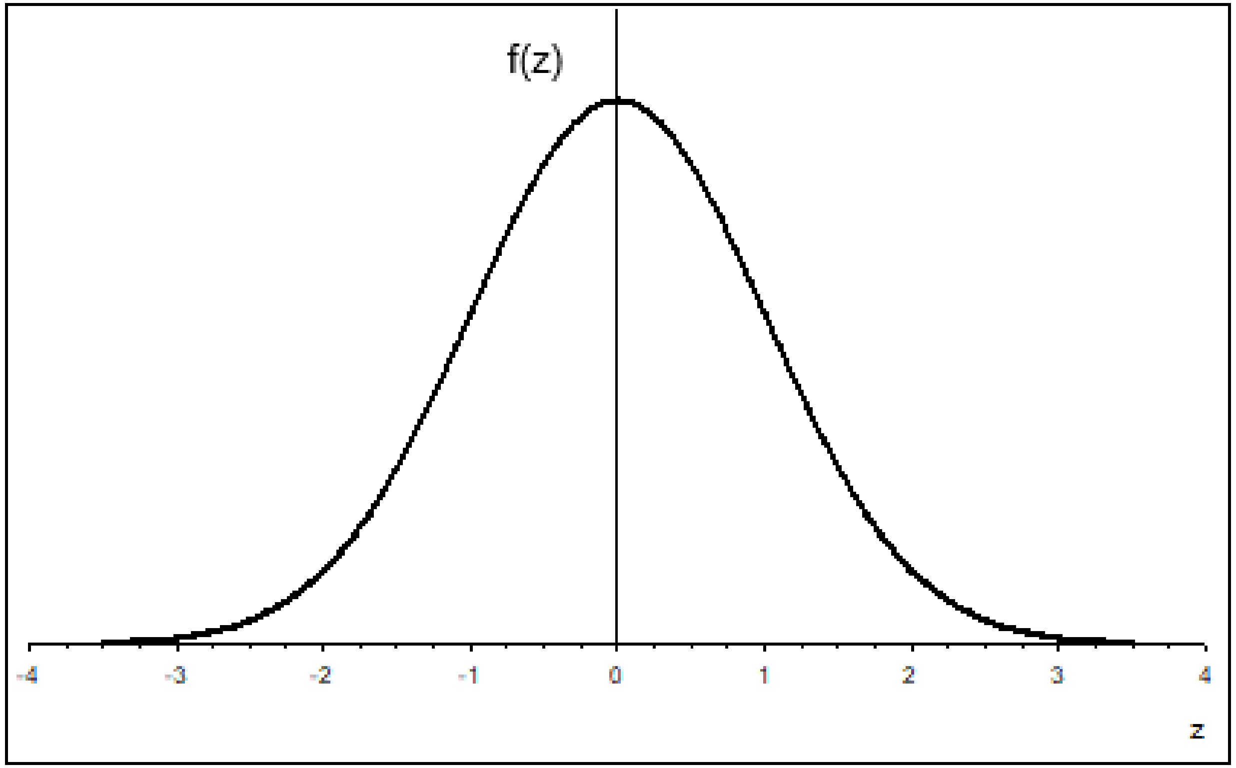
- Standardizovana, normalizovana odnosno normirana slučajna promenljiva se označava sa Z i pokazuje odstupanje i smer odstupanja vrednosti normalne promenljive X od aritmetičke sredine μ, iskazano u standardnim devijacijama σ.

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- Formula za raspored verovatnoća standardizovane slučajne promenljive glasi

$$f(z) = N(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

NORMALNA RASPODELA



Slika 4.11: Gustina raspodele standardizovane slučajne promenljive

NORMALNA RASPODELA

- Verovatnoća da slučajna promenljiva koja ima normalan raspored uzme neku vrednost iz intervala (a,b) može se izraziti kao razlika funkcije rasporeda gornje i donje granice posmatranog intervala:

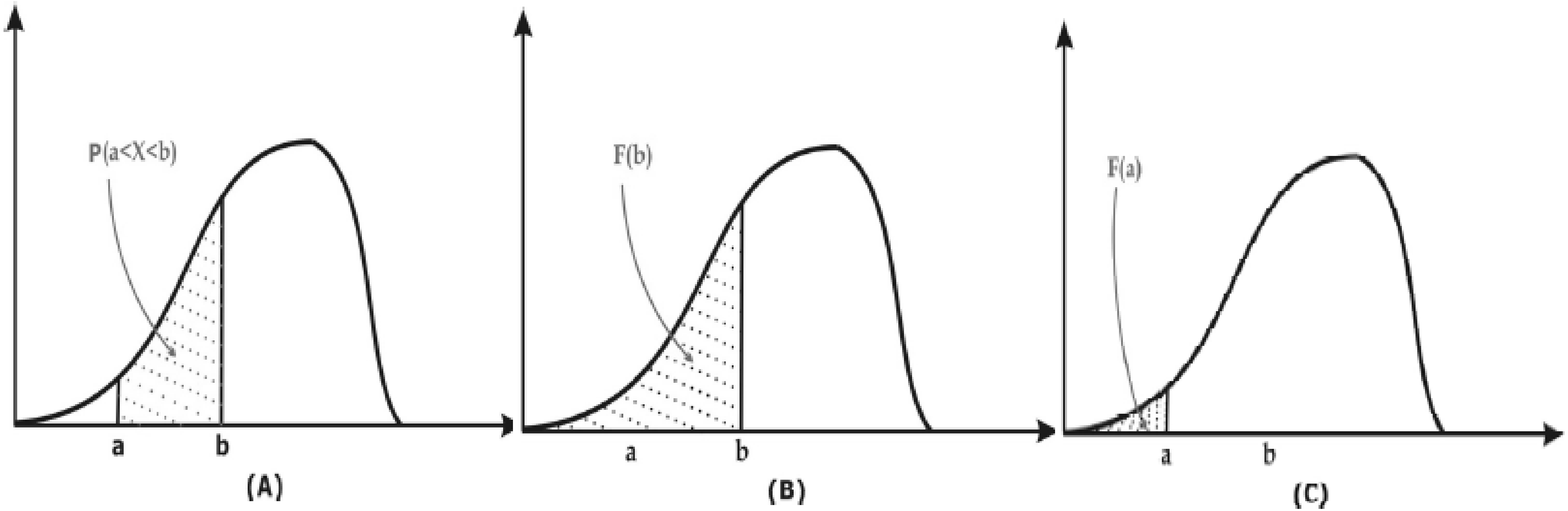
$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

- Postupak izračunavanja je sledeći:

NORMALNA RASPODELA

- Prvo se izračuna verovatnoća da slučajna promenljiva X uzme neku vrednost manju ili jednaku od b (F(b));
- Zatim se računa verovatnoća da slučajna promenljiva X uzme neku vrednost manju ili jednaku od a (F(a));
- Na kraju se izračuna razlika dobijenih verovatnoća koja predstavlja verovatnoću da se slučajna promenljiva X nađe u intervalu od a do b.

NORMALNA RASPODELA



Slika 4.8 Određivanje verovatnoće da se X nađe u intervalu (a, b) korišćenjem funkcije rasporeda

NORMALNA RASPODELA

- Normalna raspodela je najznačajniji teorijski raspored verovatnoća iz sledećih razloga:

1. Veliki broj pojava ima približno normalan raspored.

2. Pod određenim uslovima drugi rasporedi teže normalnom. Zato je normalan raspored dobra zamena prekidnih rasporeda.

3. Iz normalnog rasporeda su izvedeni drugi značajni neprekidni rasporedi (Student-ov ili t-raspored, χ^2-raspored i F-raspored).

4. Parametarsko statističko zaključivanje se zasniva na normalnoj raspodeli.

NORMALNA RASPODELA

- **Primer 1:** Vek trajanja sijalica u jednoj fabrici ima približno normalan raspored sa aritmetičkom sredinom jednakom 100 časova i standardnom devijacijom 20 časova. Koliki je procenat sijalica sa vekom trajanja između 60 i 90 časova?
- **Rešenje:**

$$\mu = 100$$
$$\sigma = 20$$

$$P\,(60 < X < 90) = ?.$$

NORMALNA RASPODELA

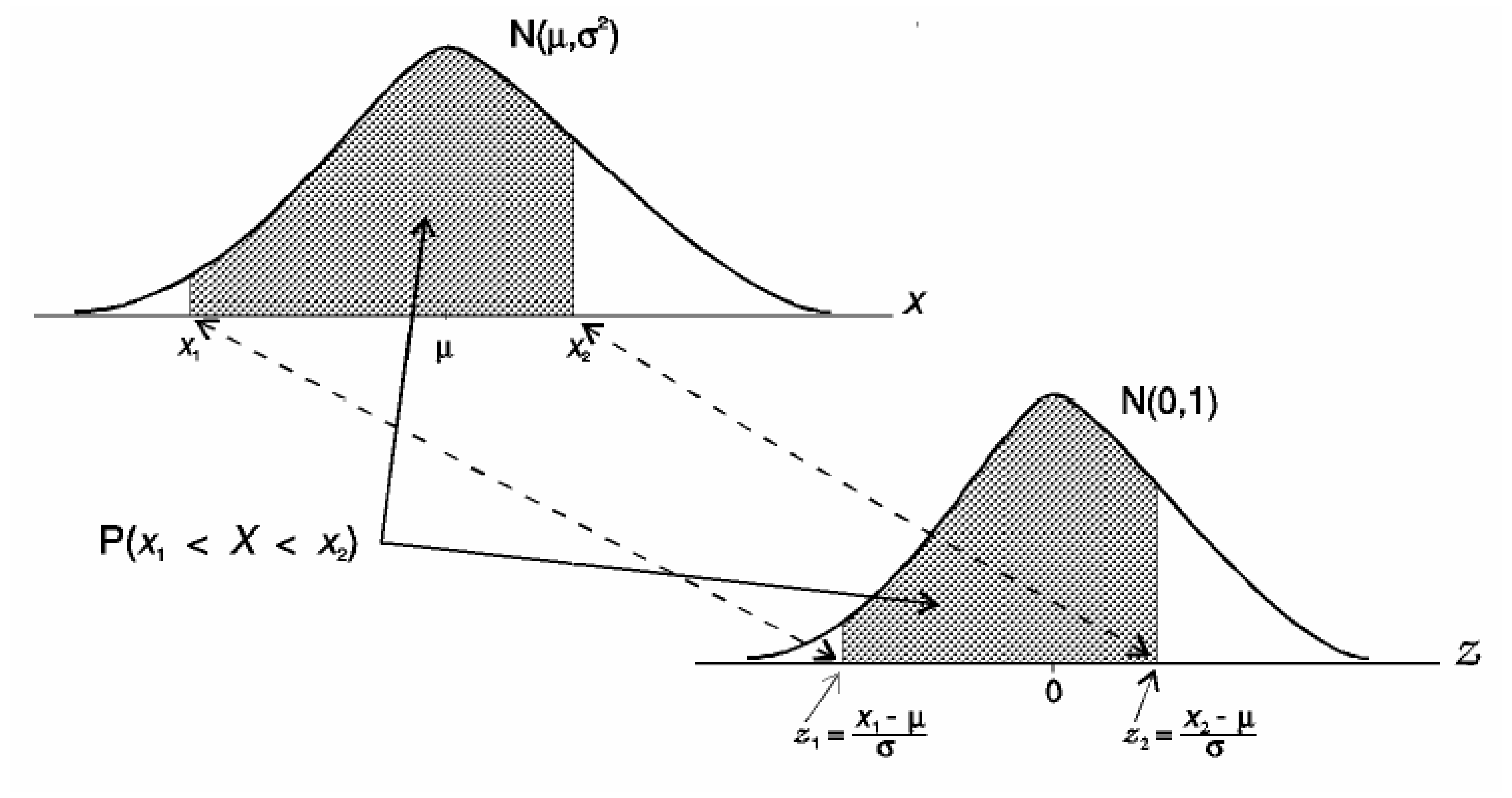
- Sada primenjujemo postupak standardizacije, odnosno važi jednakost:

$$P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 < Z < z_2)$$

- gde su:

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \text{ i } z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

NORMALNA RASPODELA



NORMALNA RASPODELA

$$P(60 < X < 90) = P(\frac{60-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{90-\mu}{\sigma}) =$$

$$= P(\frac{60-\mu}{\sigma} < Z < \frac{90-\mu}{\sigma}) =$$

$$= P(\frac{60-100}{20} < Z < \frac{90-100}{20}) = P(-2 < Z < -0,5) =$$

$$= F(-0,5) - F(-2) = 0,3085 - 0,0227 = 0,2758.$$

NORMALNA RASPODELA

- **Komentar:** U skupu svih sijalica procenat sijalica sa vekom trajanja između 60 i 90 časova je 27,58%.
- **Primer 2:** Na osnovu podataka prethodnog zadatka izračunati vreme do kojeg će trajati 99% sijalica.
- **Rešenje:**

$$P(X \le x) = 0,99$$

NORMALNA RASPODELA

- U tablicama standardizovanog normalnog rasporeda tražimo onu vrednost z za koju važi relacija:

$$P(X \leq x) = P(Z \leq z) = F(z) = 0,99$$

- Iz tablica nalazimo da je z=2,33.
- Sada na osnovu formule standardizovanog odstupanja

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

NORMALNA RASPODELA

- računamo vrednost X:

$$x = \mu + z\sigma = 100 + 2,33 \cdot 20 = 146,6$$

- U posmatranom skupu sijalica 99% sijalica ima vek trajanja do 146,6 časova.

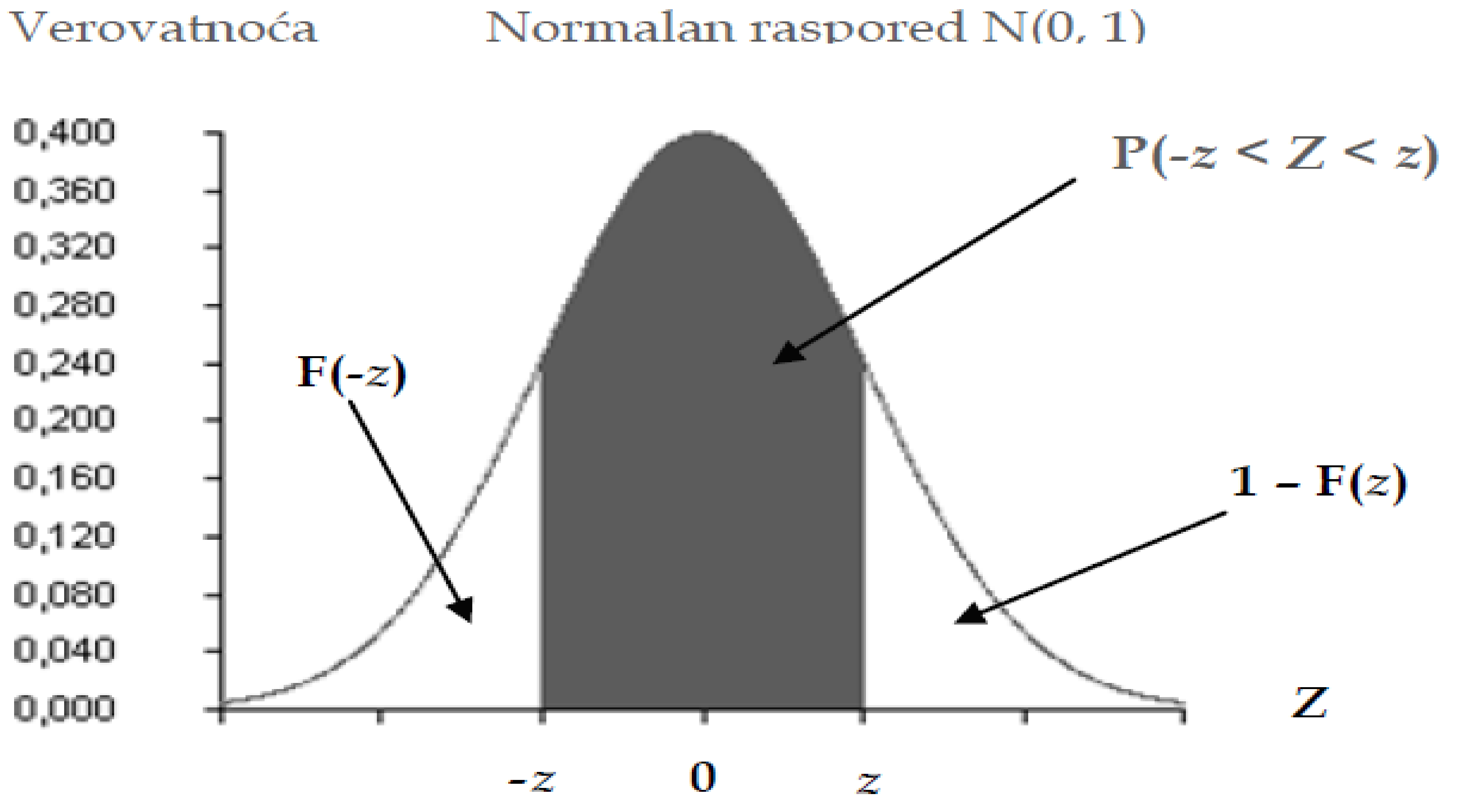
NORMALNA RASPODELA

- Odredimo sada verovatnoću da se slučajna promenljiva Z nađe u intervalu čije su granice simetrične u odnosu na aritmetičku sredinu jednaku 0. Te granice su –z i +z.

$$P(-z < Z < z) = F(z) - F(-z)$$

- Na narednoj slici se vidi da su obe nešrafirane površine jednake, odnosno

$$F(-z) = 1 - F(z)$$



Slika 4.15 Verovatnoća da se Z nađe u intervalu između dve simetrične tačke u odnosu na $\mu_Z = 0$

NORMALNA RASPODELA

- Sada možemo pisati:

$$P(-z < Z < z) = F(z) - \left[1 - F(z)\right] = 2F(z) - 1$$

- **Primer 3:** Izračunati verovatnoću da slučajna promenljiva Z uzme vrednost iz intervala (-1;1).
- **Rešenje:**

$$P(-1 < Z < 1) = 2F(1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826$$

NORMALNA RASPODELA

- **Primer 4:** Verovatnoća da slučajna promenljiva Z uzme neku vrednost iz intervala čije su granice simetrične u odnosu na aritmetičku sredinu jednaku nuli je 0,95. Izračunati granice posmatranog intervala.
- **Rešenje:**

$$0,95 = 2F(z) - 1$$

NORMALNA RASPODELA

- Iz postavljene jednakosti se dobija da je F(z)=0,975
- Iz tablica se čita da je z=1,96
- Na osnovu simetrije krive normalne raspodele zaključujemo da je:

$$P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) = 0{,}95.$$