STATISTIKA

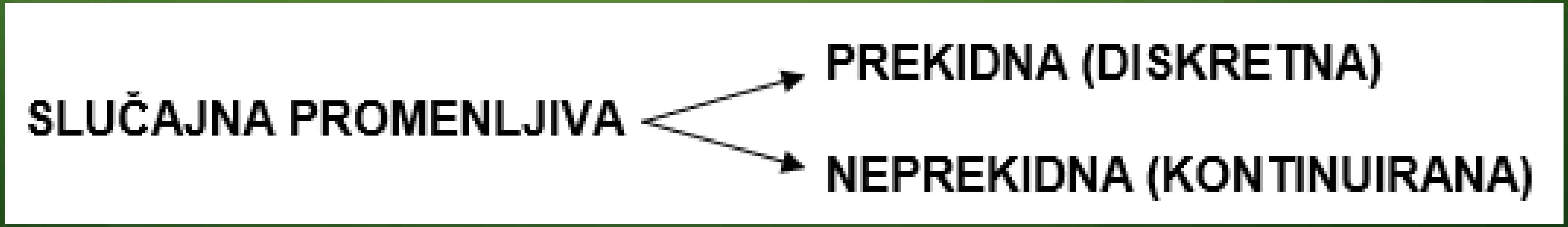
TEORIJSKE RASPODELE PREKIDNIH SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

TEORIJSKE RASPODELE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

- ***Slučajna promenljiva je veličina koja u zavisnosti od ishoda nekog složenog slučajnog događaja uzima vrednosti iz skupa realnih brojeva.***
- Slučajne promenljive se označavaju velikim latiničnim slovima A,B,C... ili X,Y,Z,... a njihove realizacije istim, malim, latiničnim slovima a,b,c,.... tj. x,y,z,....kojima se obično dodaju i indeksi.
- U primenjenoj statistici slučajnoj promenljivoj odgovara ispitivano obeležje.

TEORIJSKE RASPODELE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

- Prema karakteru realizacija slučajne promenljive mogu biti **prekidne (diskretne) i neprekidne (kontinuirane).**
- Prekidne su one slučajne promenljive koje mogu uzeti konačno ili prebrojivo mnogo izolovanih vrednosti.
- Neprekidne slučajne promenljive mogu uzeti bilo koju vrednost iz nekog konačnog ili beskonačnog intervala realnih brojeva.



RASPODELA PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

- Za potpunu karakterizaciju prekidne slučajne promenljive potrebno je znati njene vrednosti i verovatnoće sa kojima se one mogu realizovati.
- ***Funkcionalna veza između vrednosti slučajne promenljive i verovatnoća njihove realizacije predstavlja zakon raspodele slučajne promenljive (raspored verovatnoće, funkciju verovatnoće ili zakon verovatnoće).***
- Specifičnost funkcionalne veze neke raspodele verovatnoća opisana analitičkim izrazom predstavlja jednu teorijsku raspodelu.

RASPODELA PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

- Neka diskretna slučajna promenljiva X uzima vrednosti x_1, x_2,.....,x_k sa verovatnoćama p_1,p_2,...,p_k tj.

$$
\begin{aligned}
p_1 &= P(X=x_1) \\
p_2 &= P(X=x_2) \\
&. \\
&. \\
p_k &= P(X=x_k)
\end{aligned}
$$

pri čemu je $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

Zakon raspodele diskretne slučajne promenljive X može se zadati pomoću: **tabele raspodele, poligona raspodele, analitičkog izraza i funkcije raspodele.**

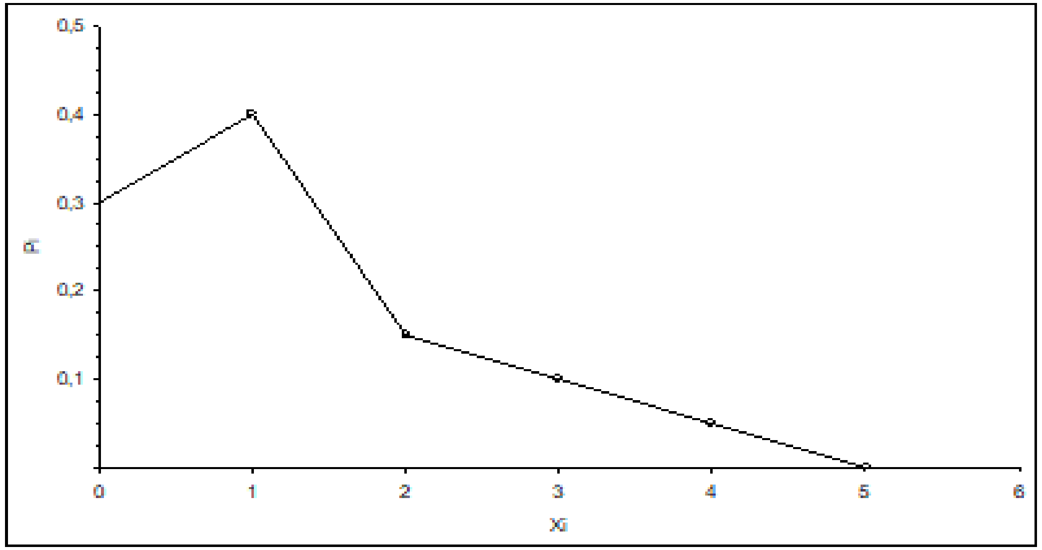
RASPODELA PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

- 1. **tabela raspodele**

Tabela 4.1: Raspored verovatnoće prekidne slučajne promenljive X

X_i	x_1	x_2	....	X_{k-1}	X_k
P_i	p_1	p_2	....	p_{k-1}	p_k

- 2. **poligon raspodele**

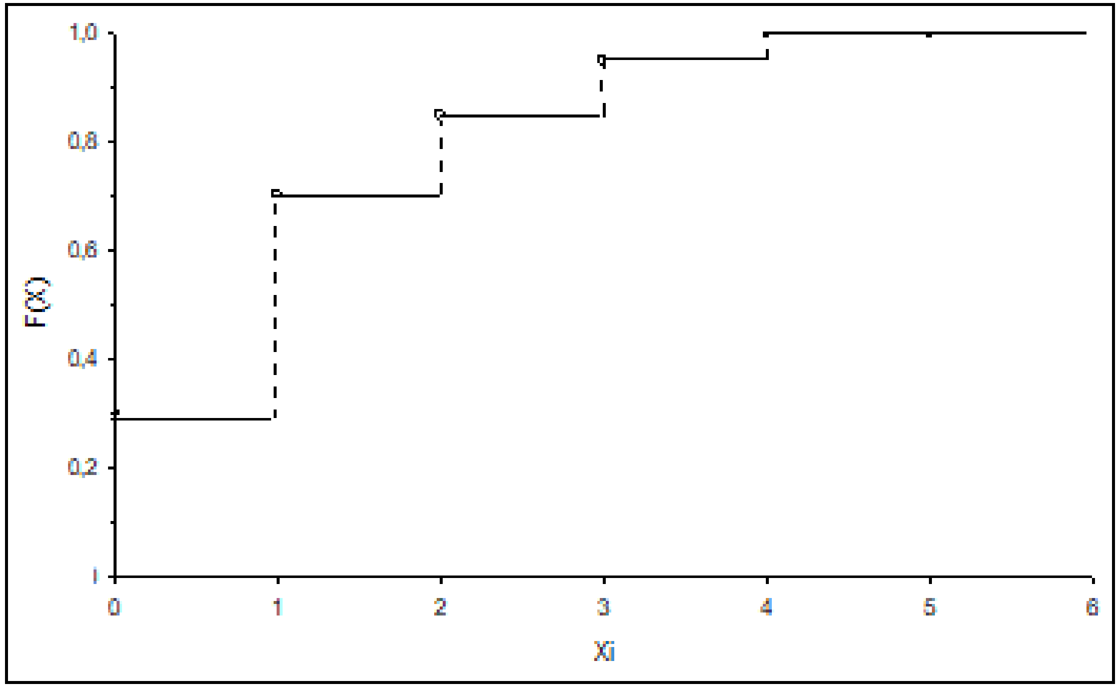


Slika 4.1: Poligon raspodele

RASPODELA PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

- **3. analitički izraz** $p_i = f(x_i); \quad i = 1, 2, \ldots$
- **4. funkcija raspodele *F(x) predstavlja verovatnoću da slučajna promenljiva X uzme vrednosti manje od x***, tj. $F(x) = P(X < x)$.
- funkcija raspodele predstavlja zbirove uzastopnih verovatnoća,
- funkcija raspodele je definisana za sve realne vrednosti x, pri čemu je $F(-\infty)=0$ i $F(+\infty)=1$.

RASPODELA PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE



Slika 4.2: Funkcija raspodele prekidne slučajne promenljive

NUMERIČKI POKAZATELJI PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

- Raspodele verovatnoće se opisuju pomoću**: matematičkog očekivanja, modusa, medijane, varijanse, standardne devijacije i koeficijenata oblika.**
- **Matematičko očekivanje M(X) ili očekivana vrednost E(X)** ***je suma svih proizvoda vrednosti slučajne promenljive i odgovarajućih verovatnoća***, tj.

$$M(X) = E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$$

NUMERIČKI POKAZATELJI PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

- Od osobina matematičkog očekivanja najznačajnija je da je matematičko očekivanje odstupanja slučajne promenljive od njenog matematičkog očekivanja jednako nuli, tj.

$$M[X-M(X)] = 0$$

- U praktičnim istraživanjima pojam matematičkog očekivanja slučajne promenljive poistovećuje se sa aritmetičkom sredinom osnovnog skupa.

NUMERIČKI POKAZATELJI PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

- **Modus (Mo)** ***diskretne slučajne promenljive je ona njena vrednost koja ima najveću verovatnoću***.
- Prema broju modusa, slučajne promenljive mogu biti unimodalne ili bimodalne.
- **Medijana (Me)** ***diskretne slučajne promenljive je ona njena vrednost za koju je***

$$P(X<Me) = P(X>Me)$$

NUMERIČKI POKAZATELJI PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

- **Varijansa** diskretne slučajne promenljive, V(X) ili σ_X^2, ***je matematičko očekivanje kvadrata njenog odstupanja od matematičkog očekivanja***

$$V(X) = M[X-M(X)]^2$$

- **Standardna devijacija,** σ_X , je kvadratni koren iz varijanse.
- **Centralni moment r-tog reda** slučajne promenljive X u oznaci $\mu_r(X)$ ***je matematičko očekivanje r-tog stepena odstupanja te slučajne promenljive od njenog matematičkog očekivanja***

$$\mu_r(X) = M\left[X - M(X)\right]^r$$

NUMERIČKI POKAZATELJI PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

- Mera asimetrije *je količnik centralnog momenta trećeg reda i trećeg stepena standardne devijacije.*

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3(X)}{\sigma_x^3}$$

- Mera spljoštenosti *je količnik centralnog momenta četvrtog reda i četvrtog stepena standardne devijacije*:

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4(X)}{\sigma_x^4}$$

RASPODELA PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE - BINOMNI RASPORED

- Ukoliko slučajna promenljiva X uzima na slučaj konačan broj uzastopnih celih vrednosti počev od nule, tj.

X: 0, 1, 2, ...,n

i ako između tih vrednosti i vrednosti odgovarajućih verovatnoća postoji veza

$$p_i = P(X = i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i} \qquad i=0,1,2,\ldots\ldots,n$$

kaže se da slučajna promenljiva X ima binomni ili Bernoulli-ev raspored sa parametrima n i p i to se označava sa X:B(n,p).

RASPODELA PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE - BINOMNI RASPORED

- Slučajna promenljiva X predstavlja broj realizacija nekog slučajnog događaja u n-nezavisnih eksperimenata.
- p je verovatnoća realizacije tog slučajnog događaja u svakom pojedinačnom eksperimentu
- q je suprotna verovatnoća.
- Iz teorije verovatnoće je poznato da je p+q =1.

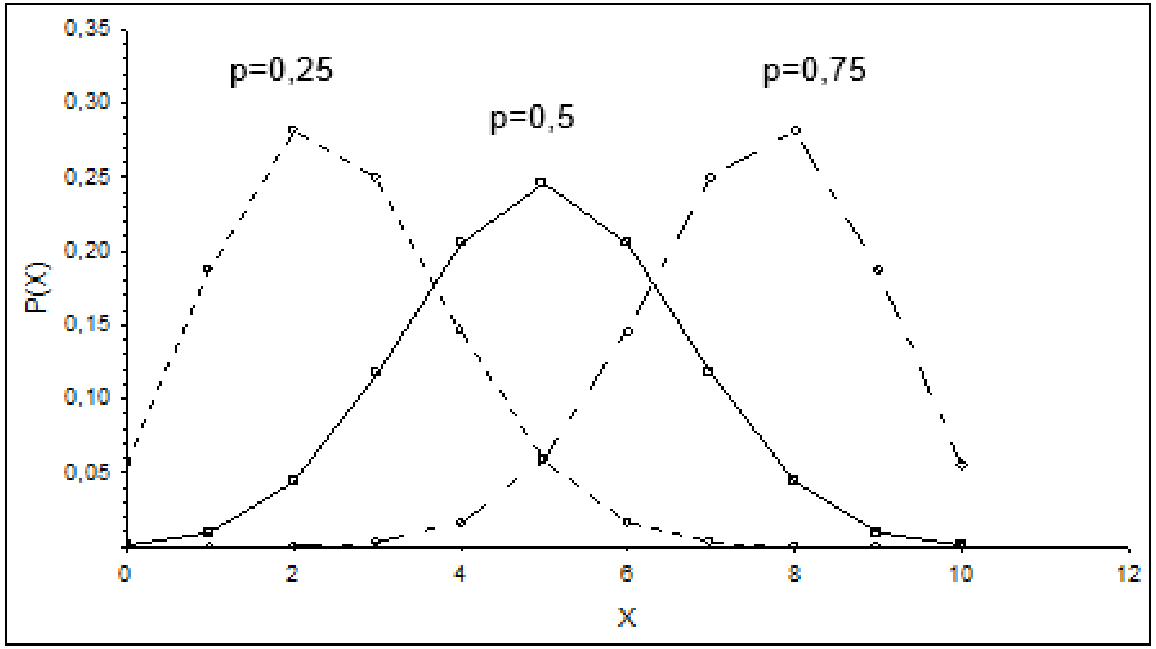
RASPODELA PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE - BINOMNI RASPORED

- Osnovni pokazatelji binomnog rasporeda su:

1. $M(X) = np$
2. $p(n+1) - 1 < Mo < p(n+1)$
3. $V(X) = npq$
4. $\alpha_3 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$ $\qquad \alpha_4 = 3 + \frac{1-6pq}{npq}$

Iz formule za koeficijent simetrije α_3 proizilazi da je raspored simetričan kada je $p=q=0{,}5$. Kada je $p<0{,}5$ raspored je asimetričan udesno, a u slučaju kada je $p>0{,}5$ raspored je asimetričan ulevo.

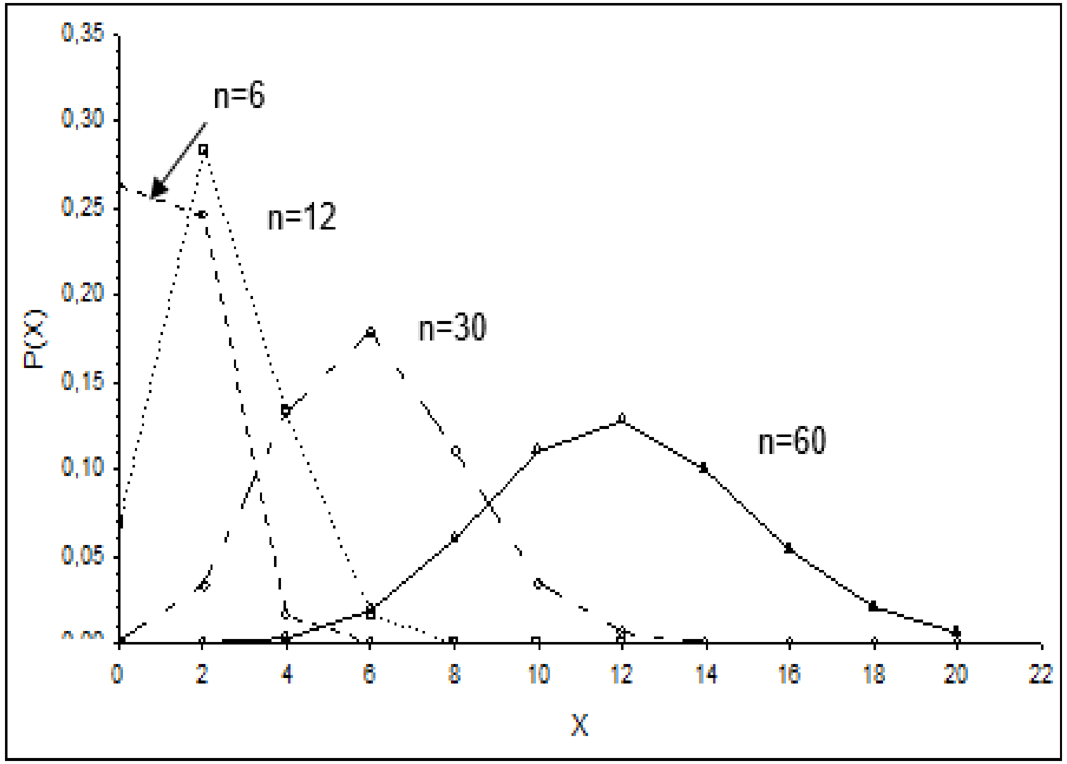
RASPODELA PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE - BINOMNI RASPORED



Slika 4.3a: Binomna raspodela za n=10 i različite vrednosti parametra p (p<0,5; p=0,5; p>0,5)

RASPODELA PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE - BINOMNI RASPORED

- Ukoliko se parametar p ne razlikuje mnogo od 0,5 sa povećanjem n (tj. broja opita) raspored postaje sve više simetričan (dobija zvonast oblik). Takođe, kad $n \to \infty$ mera $\alpha_4 \to 3$.



Slika 4.3 b: Binomna raspodela za p=0,2 i različite vrednosti n

RASPODELA PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE - BINOMNI RASPORED

- Verovatnoće se mogu odrediti i preko rekurentne formule koja uspostavlja vezu između dve uzastopne verovatnoće i kod binomnog modela glasi:

$$p_{i+1} = \frac{n-i}{i+1} \cdot \frac{p}{q} \cdot p_i$$

RASPODELA PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE - POISSON-OV RASPORED

- Ako se kod binomne raspodele parametri n i p menjaju u nizu eksperimenata ali tako da je $np=\lambda=const$ za veliko n vrednost parametra p je mala, pa se događaj čija se realizacija u nizu eksperimenata posmatra, naziva retkim događajem.
- Zakon realizacije retkih događaja naziva se Poisson-ov (Poasonov) zakon.
- Prekidna slučajna promenljiva X ima Poisson-ovu raspodelu ako je:

$$p_i = P(X=i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda};$$

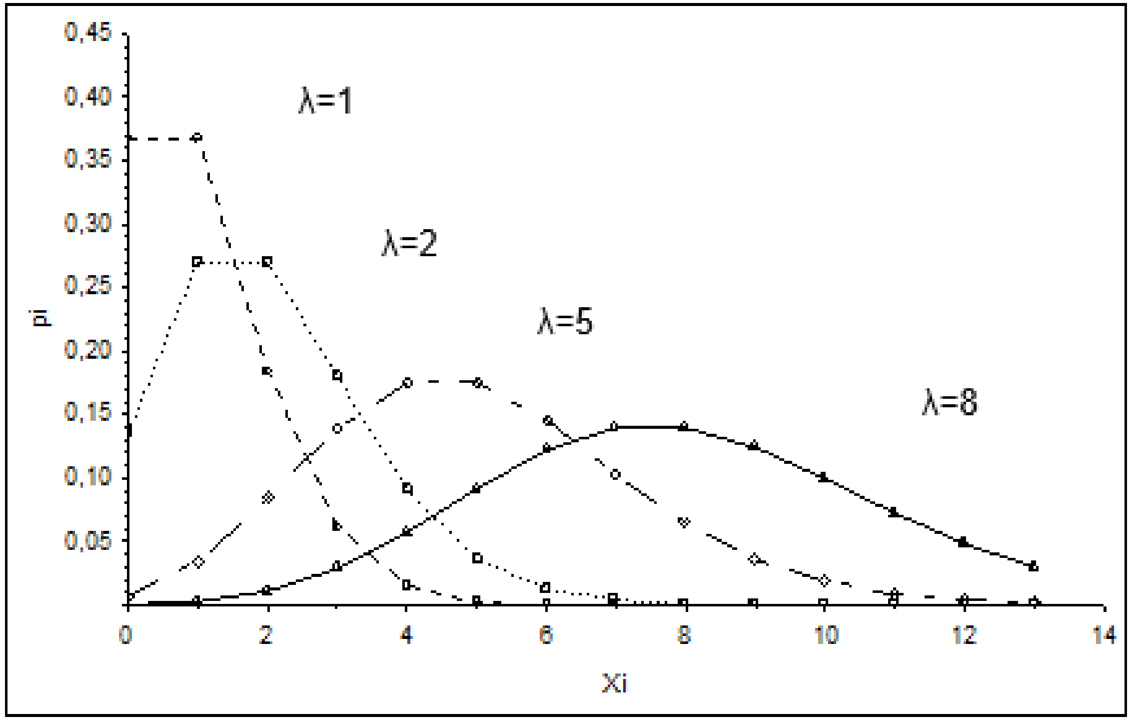
RASPODELA PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE - POISSON-OV RASPORED

- Poisson-ova raspodela sa parametrom λ skraćeno se označava sa X:P(λ).
- Osnovni pokazatelji kod Poisson-ove raspodele su:

1. $M(X)=\lambda$
2. $\lambda-1 \leq M_o \leq \lambda$
3. $V(X)=\lambda$
4. $\alpha_3 = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ $\qquad \alpha_4 = 3 + \dfrac{1}{\lambda}$

RASPODELA PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE - POISSON-OV RASPORED

- Poisson-ova raspodela je asimetrična u desnu stranu i to utoliko više ukoliko je λ manje.
- Kad $\lambda \to \infty$ raspodela teži ka simetričnoj.



Slika 4.4: Poisson-ova raspodela za različite vrednosti parametra λ

RASPODELA PREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE - POISSON-OV RASPORED

- Rekurentna formula za izračunavanje verovatnoća Poisson-ove raspodele je:

$$p_{i+1} = \frac{\lambda}{i+1} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{\lambda}{i+1} p_i.$$